

MEDIÇÃO VIRTUAL DE VAZÃO PARA SISTEMAS SUB-AMOSTRADOS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN

LUIZ C. FIGUEIREDO, ALEXANDRE V. VIEIRA

Laboratório de Controle de Processos Industriais - Departamento de Engenharia Elétrica, Centro Universitário do Leste de Minas Gerais – Unileste MG. Av. Tancredo Neves 3500, 35170-056 - Bairro Universitário - Coronel Fabriciano, MG, BRASIL

E-mails: figueiredo@unilestemg.br, avvieira@acesita.com.br

Abstract— The dynamic systems state variable can be estimate by means of the recursive estimation, which is one technique that processes the measured data of the one determined system, sequentially, supplying estimates to each iteration of the algorithm. Amongst the recursive estimators, we detach the Kalman filter, that is capable to supply excellent estimates for the states of dynamic systems, from the measurements contaminated for noise. The Kalman filter algorithm is used for estimate dynamic system states and output in situations where the variable aren't available all the moment and exactly thus, through the results, it is possible to verify the efficiency of this algorithm. In this work it is shown a virtual flow measurement instrument to under sampled systems using Kalman filter.

Keywords— Kalman, model, industrial process, process control.

Resumo— As variáveis de estado de sistemas dinâmicos podem ser estimadas por meio da *estimação recursiva*, que é uma técnica que processa os dados medidos de um determinado sistema seqüencialmente, fornecendo estimativas a cada iteração do algoritmo. Dentre os *estimadores recursivos*, destaca-se o *filtro de Kalman* que é capaz de fornecer estimativas ótimas para os *estados* de sistemas dinâmicos, a partir de medições contaminadas por ruído. O algoritmo do *filtro de Kalman* pode ser usado para estimar os *estados* e a saída de um sistema dinâmico em situações, nas quais as variáveis não estão disponíveis a todo o momento e mesmo assim, a partir dos resultados, é possível verificar a eficiência deste algoritmo. Neste trabalho é apresentado um medidor virtual de vazão para sistemas sub-amostrados utilizando o filtro de Kalman

Palavras-chave— Kalman, modelo, processos industriais, controle de processo.

1 Introdução

O controle de *sistemas* físicos sempre desempenhou um papel importante no avanço da engenharia e da ciência. Devido ao avanço tecnológico atual, a necessidade de se controlar um *sistema* tornou-se essencial para processos industriais e de manufatura modernos.

Em 1960, Rudolph Emil Kalman propôs um *algoritmo recursivo* conhecido como *filtro de Kalman*, capaz de estimar *variáveis de estado* a partir de medições ruidosas de um determinado *sistema* (Kalman, 1960). O *filtro de Kalman* é um *algoritmo recursivo* concebido para ser aplicado em *sistemas* de dinâmica linear, com baixo esforço computacional, com aplicações nas mais diversas áreas, tais como navegação espacial e marítima, instrumentação de usinas nucleares, modelagem demográfica, economia, robótica e processos industriais em geral. A função básica do *filtro de Kalman* é fornecer *estimativa ótima* dos *estados* do *sistema*, prever valores futuros de determinadas variáveis ou melhorar a estimativa de variáveis em instantes anteriores.

Sistemas sub-amostrados ou que podem ficar algum tempo sem informações atuais de medição são comuns na área de robótica. Um veículo pode ter sua posição determinada por um sistema de satélites (GPS), porém a posição correta pode ficar indisponível dependendo dos obstáculos no caminho como

túneis, prédios, dentre outros. Por outro lado, um sistema de determinação da posição do veículo por odometria por se basear na integração do deslocamento pode acumular erros e não apresentar a posição correta do veículo. A combinação da informação da posição do veículo dada pelo GPS mais a da odometria pode ser realizada com a utilização do filtro de Kalman (Figueiredo, 2001). A mesma técnica pode ser estendida para a indústria através da determinação do modelo físico do processo, medição da variável de processo (mesmo que esta medição seja sub-amostrada) e combinação dos dois valores utilizando o filtro de Kalman. Tal procedimento pode ser estendido para sistemas de controle baseado em redes de computadores probabilísticas desde que a estampa de tempo da medição obedeça determinado período de amostragem e seja enviada junto com o resultado da medição.

Os objetivos desse trabalho são:

- Mostrar a modelagem de um *sistema* físico real de medição de vazão na forma de espaço de *estados*;
- Apresentar o funcionamento do algoritmo recursivo de estimação de estados baseado no *filtro de Kalman*;
- Aplicar o *filtro de Kalman* para estimação de *estados* de uma malha de vazão.

O artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2, são apresentados os conceitos básicos sobre

o filtro de Kalman. Na seção 3, são apresentados: a planta onde foram realizados os testes, a modelagem do sistema e os resultados obtidos. Na seção 4, alguns comentários conclusivos.

2 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos e estimação Recursiva

O *modelo matemático* de um *sistema* é definido como “um conjunto de equações usado para representar um *sistema* físico”, segundo o dicionário IEEE¹. Nenhum modelo matemático de um *sistema* físico é exato e podemos melhorar a precisão de um modelo aumentando a complexidade de suas equações, porém nunca obteremos exatidão (Phillips, 1996). Na modelagem matemática busca-se um modelo que seja adequado ao problema apresentado, sem torná-lo excessivamente complexo. Na obtenção de um modelo matemático razoavelmente simplificado, freqüentemente se torna necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao *sistema* (Ogata, 2003). O modelo pode ser preciso para uma determinada entrada, mas completamente impreciso para outra entrada específica, pode ser válido em operações de baixa freqüência, poderá não ser válido em freqüências suficientemente altas, ou seja, o modelo de um *sistema* depende, entre outras coisas, do sinal de entrada.

A *identificação de sistemas* possui uma etapa chamada de *estimação de parâmetros* de uma estrutura do *modelo*. Depois de selecionada a estrutura do *modelo* é possível calcular os parâmetros, por meio de um algoritmo apropriado, a partir de um conjunto de dados coletados do *sistema*. Basicamente existem duas classes de técnicas usadas para estimar os parâmetros de um *modelo*: *estimação em batelada* e *estimação recursiva*. Na técnica de estimação em batelada todo o conjunto de dados deve estar disponível antes de se iniciar o processo de estimação, pois o vetor de parâmetros é calculado em um único conjunto de operações.

Na *estimação recursiva* os dados medidos podem ser utilizados seqüencialmente, ou seja, à medida que são disponibilizados, atualizando constantemente o *vetor de parâmetros* do *modelo*. Existem diversos algoritmos capazes de realizar *estimação recursiva*, tais como: *estimador recursivo estendido de mínimos quadrados*, *estimador recursivo de variáveis instrumentais*, *filtro de Kalman*, dentre outros. O *Filtro de Kalman* é capaz de estimar as variáveis de *estado* de *sistemas* dinâmicos lineares representados por *modelos* em espaços de *estados*. Geralmente estes *sistemas* possuem *variáveis de estados* que na prática são difíceis ou impossíveis de serem medidas.

Os modelos são basicamente classificados como *modelos determinísticos*, onde não são modeladas incertezas de nenhuma natureza e os *modelos estocásticos*, onde as incertezas são modeladas na forma de variáveis aleatórias (Aguirre, 2000). Quando se deseja investigar o comportamento de um *sistema*

real, observando como ele responde a determinados tipos de entradas, é freqüentemente útil desenvolver um modelo matemático que represente adequadamente alguns aspectos desse comportamento. Tal modelagem pode ser feita, embasada nas teorias *determinísticas* de forma tal que o *modelo* obtido é *determinístico*, ou então, a partir das técnicas de análise de *processos estocásticos*, o que resulta em um *modelo estocástico*.

Os *modelos* estocásticos apresentam em suas equações os termos referentes ao ruído de processo e ruído de medição, conforme apresentado abaixo:

$$\text{Tempo discreto} \begin{cases} x_k = f(x_{k-1}) + w_k \\ y_k = h(x_k) + e_k \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Tempo contínuo} \begin{cases} \dot{x} = f(x) + w \\ y = h(x) + e \end{cases} \quad (2)$$

Os *sistemas* (1) e (2) representam *processos estocásticos* multidimensionais, sendo \mathbf{x}_k os *estados* do *sistema*, \mathbf{y}_k a saída do *sistema*, \mathbf{w}_k e \mathbf{w} os vetores de ruído de processo e \mathbf{e}_k e \mathbf{e} os vetores de ruído de medição. O *filtro de Kalman* aborda o problema geral de se tentar estimar os *estados* de um *sistema* representado por um *modelo estocástico*.

2.1 Filtro de Kalman

O *filtro de Kalman* objetiva estimar as variáveis de *estado* de *sistemas* representados por modelo em *espaços de estados*. Tal procedimento é muito útil em situações na qual é desejável que todas as variáveis de *estado* do modelo estejam disponíveis. A medição direta de todos os *estados* é uma tarefa impossível em muitas aplicações reais, fazendo com que se torne necessário estimá-los. Essa estimação pode ser realizada por *estimadores recursivos* apropriados, de maneira análoga à estimação de parâmetros realizada em procedimentos de identificação de *sistemas*.

Os problemas de estimação de *estados* geralmente são abordados de três maneiras distintas, e para cada uma dessas abordagens é usado um termo diferente na literatura. Para que se possa fazer uma distinção entre esses termos é interessante considerar a seguinte situação. Um sinal $y_k = y_k^i + e_k$, sendo y_k^i uma parcela ideal sem ruído e e_k uma parcela de ruído, é medido de foram que todos os valores y_0, \dots, y_k são conhecidos. A partir dessa medição, o que se pode inferir com relação ao valor do sinal em um determinado instante k_a , pode ser menor, igual ou maior que k . A determinação do instante até o qual se deseja estimar, dá origem a três termos diferentes, normalmente encontrados na literatura quando o assunto é *estimação de estados*:

- $k_a < k$. Deseja-se estimar os valores apenas do passado dos *estados*. Este é um problema de *interpolação*.

- b) $k_a = k$. Estimaco de valores do presente. O estimador, nesses casos   chamado de *filtro*.
- c) $k_a > k$. Quando se necessita dos valores dos *estados* em instantes futuros, usa-se o termo *predico*.

2.2 Algoritmo do Filtro de Kalman

A funo do *filtro de Kalman*   estimar as *variáveis de estado de sistemas* lineares a partir de medies contaminadas por ruído. Para facilitar a compreenso do algoritmo, ele será apresentado considerando-se um *sistema* unidimensional, ou seja, tem-se apenas uma variável a estimar. Dessa forma, as grandezas envolvidas deixam de ser vetores, passando a ser escalares.

Deseja-se estimar os valores de uma certa variável aleatória escalar x_k , a qual satisfaz a equao linear (3):

$$x_k = ax_{k-1} + w_{k-1} \quad (3)$$

sendo que “ a ”, tem valor conhecido e w_{k-1}   um ruído branco, gaussiano, de média zero e variância q .

O primeiro passo   inicializar o algoritmo de forma adequada. Considera-se que a melhor estimativa inicial para x   conhecida, e será representada por \hat{x}_0 . Entretanto, supõe-se que haja um erro entre o valor real de x_0 e o valor estimado \hat{x}_0 , cuja *variância* pode ser expressa por:

$$P_0 = E[x_0 - \hat{x}_0]^2 \quad (4)$$

De posse das condies iniciais,   possível calcular uma estimativa para a amostra seguinte, que será designada por \tilde{x}_1 . De acordo com a equao (3), verifica-se que o valor real dessa amostra  :

$$x_1 = ax_0 + w_0 \quad (5)$$

Segundo Kalman, a melhor estimativa para x_1  :

$$\tilde{x}_1 = a\hat{x}_0 \quad (6)$$

  possível constatar que essa   realmente a melhor estimativa, levando-se em conta o conjunto de informaes que se tem disponíveis até então, pois não há como atribuir outro valor a w_0 que não seja a média, definida como sendo nula. A *variância* do erro de estimao de \tilde{x}_1   dada por:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= E[x_1 - \tilde{x}_1]^2, \\ \bar{p}_1 &= E[ax_0 + w_0 - a\hat{x}_0]^2, \\ \bar{p}_1 &= a^2 E[x_0 - \hat{x}_0]^2 + 2aE[(x_0 - \hat{x}_0)w_0]. \end{aligned}$$

Como não há correlao entre w e x , o último termo na equao anterior   nulo e a expressão simplificada  :

$$\bar{p}_1 = a^2 p_0 + q \quad (7)$$

Na etapa seguinte, obtm-se uma medida da variável x , contaminada por ruído, conforme e seguinte equao:

$$y_1 = cx_1 + e_1 \quad (8)$$

Sendo que y_1   a amostra do sinal medido, c   uma constante conhecida e e_1 ruído branco, cuja variância   r . Caso o valor de y_1 fosse estimado antes de se obter a medida, esse seria:

$$\tilde{y}_1 = c\tilde{x}_1 \quad (9)$$

De acordo com as equaes (6) e (9), \tilde{x}_1 e \tilde{y}_1 foram obtidos a partir de valores obtidos no passado, ou seja, \tilde{x}_0 nesse caso. Por esse motivo essas equaes são chamadas de *equaes de predico*. Segundo Kalman, a partir da medio de y_1 ,   possível obter uma nova estimativa para x_1 , de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + k_1(y_1 - \tilde{y}_1) \\ \hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + k_1(y_1 - c\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (10)$$

sendo que k_1   o ganho de Kalman para o instante $k = 1$.

O termo $y_1 - \tilde{y}_1$, conhecido como *inovao*, representa o erro ao estimar y_1 , sendo portanto proveniente das fontes:

- a) ruído de medio - equao (8);
b) erro ao calcular \tilde{x}_1 - equao (6).

Pode-se verificar, observando a equao (10), que o erro   multiplicado por um ganho k_1 , para então ser adicionado à estimativa \tilde{x}_1 , de forma tal que essa estimativa   corrigida. Por esse motivo, a equao (10)   chamada de *equao de correo*.

Para calcular o ganho k_1 deve-se levar em considerao a variância do erro de estimao:

$$\begin{aligned} E[x_1 - \hat{x}_1]^2 &= E[x_1 - \tilde{x}_1 - k_1(y_1 - c\tilde{x}_1)]^2, \\ E[x_1 - \hat{x}_1]^2 &= E[x_1 - \tilde{x}_1 - k_1(cx_1 + e_1 - c\tilde{x}_1)]^2, \\ E[x_1 - \hat{x}_1]^2 &= E[(1 - ck_1)^2(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (k_1e_1)^2] \end{aligned}$$

$$p_1 = \bar{p}_1(1 - ck_1)^2 + rk_1^2. \quad \text{Equao (11)}$$

Para que o erro de estimao seja mínimo e \hat{x} seja uma estimativa ótima,   preciso minimizar o valor de p_1 na equao acima. Isso   feito derivando-se p_1 em relao  k_1 e igualando-se a expressão resultante a zero. Seguindo-se esse desenvolvimento, verifica-se que o *ganho de Kalman*   dado por:

$$k_1 = \bar{c}\bar{p}_1(c^2\bar{p}_1 + r)^{-1} \quad (12)$$

As equaes (5), (7), (9), (10), (11) e (12), re-escritas de forma generalizada, podem ser reunidas compondo o *algoritmo recursivo*, que recebe o nome de *Filtro de Kalman*:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k &= a\hat{x}_{k-1}, \\
\tilde{y}_k &= c\tilde{x}_k, \\
\tilde{p}_k &= a^2 p_{k-1} + q, \\
k_k &= c\tilde{p}_k (c^2 \tilde{p}_k + r)^{-1}, \\
p_k &= \tilde{p}_k (1 - ck_k)^2 + rk_k^2, \\
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + k_k (y_k - \tilde{y}_k).
\end{aligned} \quad (13)$$

Para que possa ser aplicado em *sistemas* multidimensionais, torna-se necessário fazer pequenas alterações no algoritmo (13), permitindo que sejam realizadas algumas operações matriciais:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k &= A\hat{x}_{k-1}, \\
\tilde{y}_k &= C\tilde{x}_k, \\
\tilde{P}_k &= AP_{k-1}A^T + Q, \\
K_k &= C\tilde{P}_k(C\tilde{P}_kC^T + R)^{-1}, \\
P_k &= (1 - CK_k)\tilde{P}_k(1 - CK_k)^T + K_kRK_k^T, \\
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k(y_k - \tilde{y}_k).
\end{aligned} \quad (14)$$

3 Estimação Recursiva Aplicada a um Sistema Dinâmico

3.1 Sistema Dinâmico

O *sistema* dinâmico escolhido foi uma malha de vazão da Planta Didática Smar, o qual está instalado no laboratório de Controle e Automação do UnilesteMG, conforme apresentada na Figura 1.



Figura 1 - Planta Didática Smar

O objetivo da Planta é demonstrar didaticamente a operação das diversas malhas de controle, utilizando os mesmos equipamentos e ferramentas de configuração, desenvolvidos para aplicação em controle industrial. A Planta Didática é monitorada e operada de uma estação, constituída de um microcomputador do tipo PC e um software de supervisão, que efetua a aquisição de dados dos equipamentos e os apresentam por meio de animações de telas. O *sistema* de supervisão ProcessView, instalado no microcomputador do tipo PC, é um software que

permite monitorar e atuar no *sistema* em funcionamento, disponibilizando ao usuário ferramentas de criação de telas de sinótico, registros gráficos, tratamento de alarmes, relatórios, bancos de dados, transferência de informações para outros aplicativos e visualização em múltiplos monitores. A planta possui também um Controlador Lógico Programável (CLP), integralmente modular, chamado LC700, com uma CPU e módulos Fieldbus que interagem com os instrumentos de campo, que possuem também comunicação em Fieldbus.

A malha de vazão, selecionada como *sistema* dinâmico, possui uma bomba hidráulica responsável pela circulação de água pelas tubulações e tanques, um transmissor de pressão diferencial, com comunicação em fieldbus, que é usado em conjunto com um orifício integral para medição de fluxo de água.

A malha de vazão também possui uma válvula de controle de fluxo de água, a qual possui um posicionador, com comunicação em fieldbus. O posicionador produz uma pressão de saída requerida para posicionar a válvula de controle, conforme entrada recebida pela rede Fieldbus. Devido a tecnologia Fieldbus usada pelos instrumentos de campo, assim como o *sistema* de supervisão ProcessView, o qual é construído a partir da tecnologia aberta OPC, pode-se usar o Matlab, para através do servidor OPC, comunicar-se com os instrumentos da planta.

3.2 Identificação do Sistema Dinâmico

A identificação do *sistema* dinâmico, ilustrado na Figura 2, foi realizada pelo método de resposta transitória de um *sistema* submetido a uma excitação degrau, com condição inicial em repouso, com valor nulo da variável de saída. Assim o *sistema* apresentou oscilações amortecidas, antes de alcançar o *estado* estacionário, caracterizando um *sistema* de segunda ordem sub-amortecido.

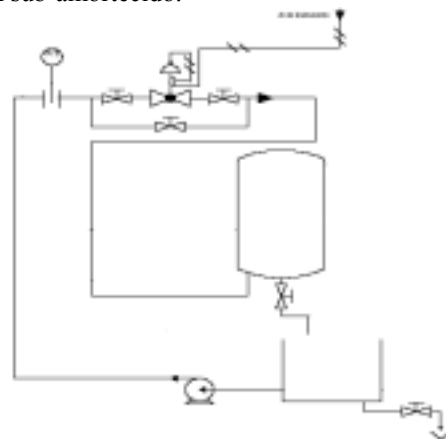


Figura 2 - Malha de vazão planta didática.

A partir do gráfico da resposta transitória do *sistema* submetido a um degrau de 25%, Figura 3, foi possível analiticamente estimar os valores de máximo valor de ultrapassagem – M_p , tempo de subida – T_r , instante de pico – T_p e ganho em regime estacionário – k_e .

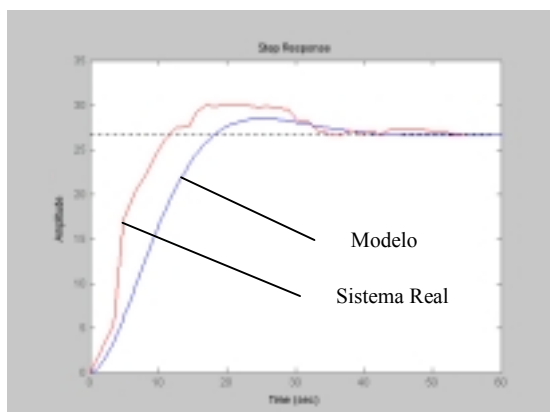


Figura 3 – Resposta do *sistema* real e *sistema* identificado

O *sistema* dinâmico foi representado na forma de função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (15)$$

Onde $Y(s)$ é a transformada de Laplace da vazão medida (sinal de saída) e $U(s)$ é a transformada de Laplace da posição de abertura da válvula de controle (sinal de entrada). Os valores estimados foram $\zeta = 0,6$; $W_n = 2$ rad/s; $K = 1,3$. A *função de transferência* do *sistema* dinâmico ficou assim determinada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5,2}{s^2 + 2,4s + 4} \quad (16)$$

A *função de transferência* convertida para a representação por *espaço de estados* é apresentada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (17)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 5,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3.3 Estimação dos Estados do Sistema Dinâmico

Para *estimação dos estados* do *sistema* dinâmico foi desenvolvido um programa em Matlab versão 7.0, o qual realiza comunicação com o servidor OPC da planta didática e com os instrumentos conectados numa rede de comunicação em Fieldbus.

O programa inicia criando e conectando um cliente OPC à planta da Smar. Após estabelecidas as condições iniciais da malha de vazão e do *filtro de Kalman*, o *sistema* dinâmico é representado na forma de *espaços de estados* (17). Em seguida, o programa estabelece os valores de 20, 80 e 50% para válvula de vazão. O programa executa o algoritmo do *filtro de Kalman* (14). O programa simula então a vazão através do modelo sem o *filtro de Kalman* e disponibiliza todos os resultados na forma gráfica.

3.4 Resultados

Resultados do primeiro experimento:

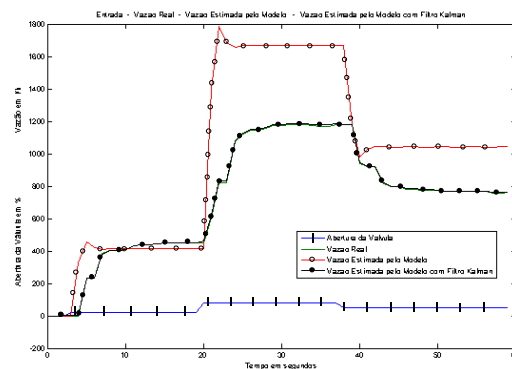


Figura 4 – Resultados com a atualização da vazão a cada 1 segundo.

Na primeira simulação, a vazão real para o modelo com *filtro de Kalman* é atualizada a cada segundo, assim como o cálculo do ganho do *filtro de Kalman*.

Pode ser observado que o modelo do *sistema*, estimado com um degrau de 25% de abertura da válvula, sem o *filtro de Kalman* apresenta um resultado razoável para valores de vazão próximos à 400 l/h (litros por hora), cerca de 25% do range deste *sistema* dinâmico. Mas para valores de vazão em torno de 1200 l/h e em torno de 800 l/h o modelo do *sistema* sem o *filtro de Kalman* apresenta valores bem distantes da vazão real, com erro chegando próximos aos 500 l/h.

Por outro lado, o modelo do *sistema* com *filtro de Kalman* sendo calculado a cada segundo, apresenta-se como um *estimador de estados* do *sistema*. A vazão estimada pelo modelo com *filtro de Kalman* aproxima de forma muito eficaz a vazão real em toda a faixa simulada. Mesmo durante as mudanças bruscas da vazão, a vazão estimada apresenta-se com ótimos resultados.

Resultados do segundo experimento:

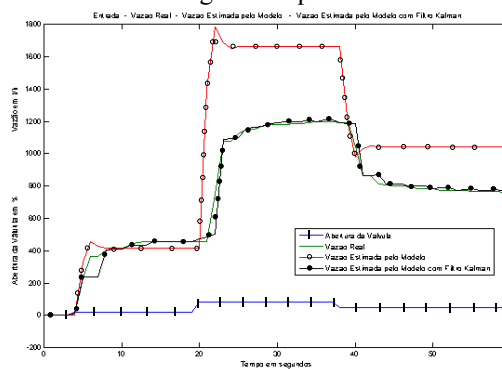


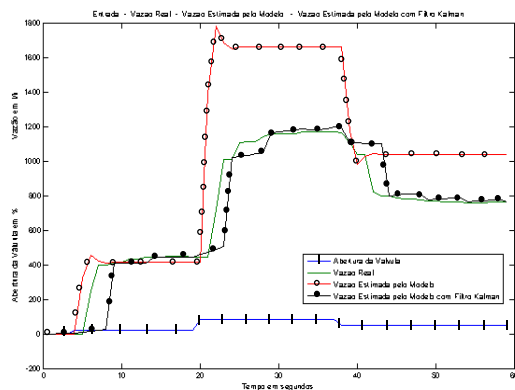
Figura 5 – Resultados com a atualização da vazão a cada 3 segundos

Na segunda simulação, a vazão real para o modelo com *filtro de Kalman* é atualizada a cada três segundos, assim como o cálculo do ganho do *filtro de Kalman*.

O modelo do *sistema* sem o *filtro de Kalman* apresenta o mesmo resultado da primeira simulação.

Enquanto o modelo do sistema com *filtro de Kalman* apresenta uma vazão estimada próxima à vazão real. Pode ser observado, que a cada 3 segundos, o *ganho de Kalman* é calculado/atualizado e, a vazão estimada, neste instante, coincide-se com a vazão real. Durante o regime estacionário a vazão estimada pelo modelo com *filtro de Kalman* é muito próxima à vazão real.

Durante as mudanças bruscas da vazão pode ser observada uma diferença maior entre a vazão estimada e a real, a qual é eliminada quando é calculado o ganho do *filtro de Kalman*.



Resultados do terceiro experimento:

Figura 6 – Resultados com a atualização da vazão a cada 5 segundos

Nesta terceira simulação, a vazão real para o modelo com *filtro de Kalman* é atualizada a cada cinco segundos, assim como o cálculo do ganho do *filtro de Kalman*.

O modelo do sistema sem o *filtro de Kalman* apresenta o mesmo resultado das simulações anteriores. Pode ser observado, que a cada cinco segundos, o *ganho de Kalman* é calculado/atualizado e neste instante, a vazão estimada pelo modelo coincide com a vazão real.

Se comparado com a segunda simulação, ocorre uma diferença maior entre a vazão estimada e a vazão real, principalmente durante as mudanças bruscas da vazão. Mesmo assim, a resposta do modelo com o *filtro de Kalman* é muito melhor do que a resposta do mesmo sem o *filtro de Kalman*.

5 Conclusão

O *Filtro de Kalman* tem sido aplicado em diversas áreas da ciência, por se tratar de um algoritmo recursivo que calcula as estimativas das variáveis minimizando o valor esperado da soma quadrática dos resíduos de estimação, capaz de estimar os estados de sistemas dinâmicos perturbados por ruído. Com este trabalho foi possível modelar um sistema físico real na forma de *espaço de estados*, investigar o algoritmo recursivo baseado-se no *Filtro de Kalman* e aplicá-lo para estimação de estados de um sistema dinâmico.

A revisão bibliográfica e a experiência adquirida com os experimentos estudados neste trabalho mostraram que o uso do *Filtro de Kalman* para estimação de estados e saída de sistemas dinâmicos pode proporcionar bons resultados.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG e ao Centro Universitário do Leste de Minas Gerais – Unileste-MG.

Referências Bibliográficas

- Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte.
- Bitencourt, H. J. (2003). *Métodos de Estimação Recursiva Baseados no Filtro de Kalman Aplicados a Sistemas Não Lineares*. UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Welch, Greg and Gary Bishop (2004). *An Introduction to the Kalman Filter*. www.cs.unc.edu/~welch/kalman
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Desing*. Published by Oxford University Press, Inc. New York.
- Figueiredo L. C. e Justino M. J. C., (2001). Robustez em Medição: *Filtro de Kalman* Aplicado a Veículos Autômatos. UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Haykin, S and Van Veen, B. (2001). *Sinais e Sistemas*. Tradução: Santos, J.C.B. Bookman, Porto Alegre.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME~Journal of Basic Engineering*, 82:35-45.
- Ogata, K (2003). Engenharia de Controle Moderno, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- Phillips, C.L. and Harbor R. D. (1996). *Sistemas de Controle e Realimentação*. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo, SP.